

در همه مسایل زیر، منظور از حلقه، یک حلقه یکدار است.

- ۱ شیء A در یک کتگوری \mathcal{C} ابتدایی نامیده می شود اگر از A به هر شیء دیگر از این کتگوری، یک مورفیزم یکتا وجود داشته باشد. مشابه شیء B در این کتگوری، انتهایی نامیده می شود اگر از هر شیء دیگر این کتگوری به B یک مورفیزم یکتا وجود داشته باشد.
- الف) نشان دهید در هر کتگوری هر دو شیء ابتدایی (انتهایی) هم ارز هستند. (اثبات برای یکی از این دو مورد کفایت می کند).
- ب) آیا در کتگوری حلقه ها، شیء ابتدایی و شیء انتهایی وجود دارد؟ (دقت کنید که در کتگوری حلقه ها، تحت یک مورفیزم، یک، به یک می رود).
- ۲ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ یک دنباله از R -مدولها باشد. نشان دهید اگر برای هر R -مدول D ، دنباله $0 \rightarrow \text{Hom}_R(D, L) \rightarrow \text{Hom}_R(D, M) \rightarrow \text{Hom}_R(D, N) \rightarrow 0$ دقیق باشد آنگاه دنباله اصلی $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ یک دنباله دقیق شکافته است. (فقط اثبات دقیق بودن در جمله N و شکافته شدن دنباله را بیان کنید).
- ۳ نشان دهید $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ و $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ به عنوان \mathbb{R} -جبر ایزومورف هستند.
- ۴ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و P و Q دو R -مدول تصویری باشند. نشان دهید $P \otimes_R Q$ تصویری است. برعکس آیا از تصویری بودن $P \otimes_R Q$ برای مدولهای ناصفر P و Q ، می توان تصویری بودن P و Q را نتیجه گرفت؟
- ۵ فرض کنید J ایده آل ناصفری از یک PID مانند R باشد. نشان دهید R/J یک R/J -مدول انژکتیو است. آیا این حکم برای $J = 0$ هم برقرار است؟
- ۶ فرض کنید R یک حلقه جابجایی، F یک R -مدول یکدست، و $a \in R$ مقسوم علیه صفر نباشد. نشان دهید اگر برای $x \in F$ داشته باشیم $ax = 0$ آنگاه داریم $x = 0$.
- ۷ فرض کنید M یک مدول آزاد روی یک PID با رتبه n باشد. نشان دهید هر زیر مدول N از M نیز آزاد است و رتبه آن کوچکتر یا مساوی n است.

موفق باشید