جبر پیشرفته

امتحان پایان ترم | تاریخ پنجشنبه ۲۱ دی ۱۳۹۱

مدت: ۳ ساعت

در همه مسایل زیر، منظور از حلقه، یک حلقه یکدار است.

۱ الف) فرض R یک حلقه جابجایی، S یک مجموعه بسته ضربی در R و M یک $R-$مدول متناهیا تولید شده باشد. نشان دهید $S^{-1}M = 0$ اگر و تنها اگر $d \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $dM = 0$.
ب) قرار دهید $R = \mathbb{Z}$، $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ و $S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. آیا $S^{-1}M = 0$؟ آیا $d \in S$ هست به‌طوری‌که $dM = 0$؟ آیا M متناهیا تولید شده است؟

۲ یک مدول تجزیه‌ناپذیر که ساده نباشد مثال بزنید. همچنین یک سری ژوردان هولدر برای این مدول نوشته و طول آن را نیز محاسبه کنید.

۳ فرض کنید M یک مدول تجزیه‌ناپذیر از طول متناهی باشد. نشان دهید هر $\varphi \in \mathrm{End}(M)$ یا یک‌به‌یک و پوشاست و یا پوچتوان است. نتیجه بگیرید عناصر غیروارون‌پذیر $\mathrm{End}(M)$ تحت جمع بسته هستند.

۴ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M و N دو $R-$مدول نوتری باشند نشان دهید $M \otimes_R N$ نیز نوتری است.
(راهنمایی: ابتدا نشان دهید برای یک $m \geq 1$ مناسب، یک دنباله دقیق به‌صورت $R^m \to M \to 0$ وجود دارد).

۵ فرض کنید K یک میدان و R حلقه همه ماتریس‌های 2×2 بالامثلثی با درایه‌های متعلق به K باشد. رادیکال جیکوبسون R را به‌دست آورید. آیا R آرتینی چپ است؟

۶ فرض کنید K یک میدان از مشخصه $p \neq 0$ و G یک گروه متناهی که مرتبه آن بر p بخش‌پذیر باشد. نشان دهید $K[G]$ حلقه نیمه‌ساده نیست.

۷ جبر گروهی $\mathbb{C}[S_3]$ را به صورت ضرب جبرهای ماتریسی روی $\mathbb{C}$ تجزیه کنید. در اینجا S_3 گروه جایگشت‌ها روی یک مجموعه 3 عضوی است.

۸ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و I یک ایده‌آل متناهیا تولید شده از آن باشد به‌طوری‌که $I^2 = I$. نشان دهید عضو خودتوان $e \in I$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $I = Re$.

موفّق باشید