جبر ۳ کارشناسی

امتحان پایان ترم | مدت: ۳ ساعت | تاریخ سه شنبه ۱۹ دی ۱۳۹۱

---

۱ تعریف مفاهیم زیر را بیان کنید: میدان بسته جبری، گسترش نرمال، گسترش جدایی پذیر، گسترش ساده، میدان شکافنده یک چندجمله‌ای، مبین یک چندجمله‌ای، چندجمله‌ای دایره‌بر، اتومورفیسم فروبنیوس، عدد ساختنی با خط‌کش و پرگار، زاویه ساختنی با خط‌کش و پرگار، ریشه n ام اولیه واحد، نرم و اثر (trace) برای گسترش‌های میدانی، گسترش حل‌پذیر به‌وسیله رادیکالها.

۲ فرض کنید E/K یک گسترش دوری از درجه n باشد. اگر K شامل ریشه n ام اولیه واحد باشد، آنگاه ثابت کنید $\alpha \in E$ وجود دارد که ریشه چندجمله‌ایی به‌صورت $X^n - \gamma \in K[X]$ است و داریم $E = K(\alpha)$.

۳ فرض کنید E/K یک گسترش میدانی و $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \mathrm{Gal}(E/K)$ اتومورفیسم های میدانی متمایز باشند. نشان دهید $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ روی E مستقل خطی هستند.

۴ فرض کنید E/K یک گسترش گالوایی از درجه متناهی باشد. نشان دهید $\mathrm{Tr}_{E/K} : E \to K$ پوشاست.

۵ الف) کدام یک از زوایای، $\pi/2$، $\pi/3$ و $\pi/7$ با خط‌کش و پرگار قابل تثلیث هستند؟
ب) بزرگترین عدد طبیعی $n < 100$ به‌طوری‌که رسم n ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار امکان پذیر باشد را مشخص کنید.

۶ فرض کنید K یک میدان 512 عضوی باشد. تعداد زیرمیدانهای K و تعداد عناصر $\alpha \in K$ به‌طوری‌که $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$ را مشخص کنید.

۷ فرض کنید $\eta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ و $K = \mathbb{Q}(\eta)$.
الف) چند جمله ای مینیمال η روی $\mathbb{Q}$، درجه $K/\mathbb{Q}$ و تعداد زیر میدانهای میانی $K/\mathbb{Q}$ را مشخص کنید.
ب) فرض کنید $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ اتومورفیسم القایی به وسیله $\sigma(\eta) = \eta^6$ باشد. مرتبه σ به عنوان عضوی از گروه $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ را مشخص کنید.
ج) فرض کنید F میدان ثابت گروه تولید شده توسط σ در قسمت (ب) باشد. درجه $F/\mathbb{Q}$ چیست؟ عضو $\alpha \in F$ را بیابید به‌طوری‌که $F = \mathbb{Q}(\alpha)$. همچنین چند جمله‌ای مینیمال α را روی $\mathbb{Q}$ مشخص کنید.

۸ فرض کنید p یک عدد اول، K یک میدان از مشخصه صفر، $f(X) \in K[X]$ یک چندجمله ای تحویل‌ناپذیر از درجه p و E میدان شکافنده $f(X)$ باشد. نشان دهید $f(X)$ به وسیله رادیکال‌ها حل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر دو ریشه $f(X)$ در E مانند α و β داشته باشیم $E = K(\alpha, \beta)$. (راهنمایی: از این حکم در گروهها می‌توانید استفاده کنید که یک زیرگروه G از گروه متقارن S_p که روی $\{1, \cdots, p\}$ به‌طور انتقالی عمل می‌کند، حل‌پذیر است اگر و تنها اگر هر جایگشت $\sigma \neq \mathrm{id}$ متعلق به G حداکثر یک نقطه ثابت داشته باشد).