

در همه مسایل زیر F یک فضای برداری $n + 1$ بعدی ($n \geq 2$) روی \mathbb{R} مجهز به یک فرم دوخطی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ با تایپ سیلستر $(-n, 1)$ است. عناصر F با نرم 1 را با $S(F)$ و عناصر F با نرم -1 را با $N(F)$ نمایش می دهیم. مدل هذلولی گون در F با H^n نمایش داده می شود.

از سوالات ۱، ۲، ۳ و ۴ فقط به دو مورد پاسخ دهید.

۱ اگر $\dim F \geq 3$ آنگاه نشان دهید گروه تبدیلات لورنتس زوج $Lor^+(F)$ روی مجموعه $N(F)$ به طور انتقالی عمل می کند.

۲ الف) فرض کنید e و f دو بردار مستقل خطی در F باشند و R فضای برداری تولید شده توسط آنها باشد. قرار دهید $\Delta = \langle e, e \rangle \langle f, f \rangle - \langle e, f \rangle^2$. تایپ سیلستر R بسته به اینکه Δ مثبت، منفی یا صفر باشد را حساب کنید.

ب) نشان دهید برای هر دو نقطه x و u در $S(F)$ داریم $|\langle x, u \rangle| \geq 1$.

۳ نشان دهید دو نقطه x و u در $S(F)$ در یک مؤلفه همبندی هستند اگر و تنها اگر $\langle x, u \rangle > 0$.

۴ الف) فرض کنید A_1, \dots, A_p و B_1, \dots, B_p نقاطی از H^n باشند به طوری که برای هر $i, j = 1, \dots, p$ داشته باشیم $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$. نشان دهید ایزومتری σ از F که حاصلضرب حداکثر p انعکاس لورنتسی است موجود است به طوری که برای هر $i = 1, \dots, p$ داریم $\sigma(A_i) = B_i$.

ب) نشان دهید برای هر ایزومتری β روی H^n تبدیل لورنتس σ روی F وجود دارد به طوری که $\sigma|_{H^n} = \beta$.

۵ الف) نشان دهید $Lor^+(F)$ روی H^n به صورت انتقالی عمل می کند.

ب) نشان دهید $Lor^+(F)$ یک گروه همبند است.

۶ فرض کنید $N \in F$ یک بردار آنیزوتروپ باشد. نشان دهید انعکاس τ_N در امتداد بردار آنیزوتروپ N یک تبدیلی لورنتس است اگر و تنها اگر $\langle N, N \rangle < 0$.

۷ الف) فرض کنید $A \in H^n$ و $T \in N(F)$ دو بردار متعامد باشند. فاصله هذلولوی بین A و $2A + \sqrt{3}T$ چیست؟

ب) نقطه ای روی ژئودزیک واصل بین A و $2A + \sqrt{3}T$ بیابید به طوری که از این دو نقطه هم فاصله باشد.

۸ آیا برای هر تبدیلی لورنتس $\sigma : F \rightarrow F$ بردار ناصفر $u \in F$ موجود است به طوری که $\sigma(u) = u$ ؟

موفق باشید