

در مسایل زیر $Gl_2(\mathbb{R})$ گروه ماتریسهای 2×2 وارون پذیر، $Sl_2(\mathbb{R})$ گروه ماتریسهای 2×2 با دترمینان یک و $sl_2(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریسهای 2×2 با اثر (trace) 0 (همگی با درایه های حقیقی) هستند. مدل هذلولی گون در $F = sl_2(\mathbb{R})$ با H^2 نمایش داده می شود. گروه تبدیلات لورنتس F با $Lor(sl_2(\mathbb{R}))$ نمایش داده می شود.

- ۱ از قسمتهای این سؤال فقط به یک مورد پاسخ دهید.
 الف) نشان دهید مکمل هر ژئودزیک h در H^2 ، دو مؤلفه همبندی دارد و انعکاس τ در امتداد بردار نرمال N برای h این دو مؤلفه همبندی را تعویض می کند و h را ثابت نگه می دارد.
 ب) نشان دهید دو ژئودزیک h و k در H^2 با بردارهای قائم H و K همدیگر را قطع می کنند اگر و تنها اگر $|\langle H, K \rangle| < 1$.
 ج) نشان دهید عمود منصف های اضلاع یک مثلث هذلولوی در H^2 هم پرتو هستند.

- ۲ یک همومورفیسم طبیعی پوشا $\varphi : Gl_2(\mathbb{R}) \rightarrow Lor(sl_2(\mathbb{R}))$ به طوریکه $\ker \varphi = \mathbb{R}^*$ تعریف کنید. پوشایی φ و اینکه $\ker \varphi = \mathbb{R}^*$ باید اثبات شوند.

- ۳ الف) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. نگاشت φ در سؤال قبل را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varphi(A) = \alpha\beta$ تجزیه $\varphi(A)$ به حاصلضرب دو انعکاس نسبت به ژئودزیکهای h و k باشد. چرا h و k دارای ژئودزیک متعامد مشترک هستند؟ فاصله h و k را محاسبه کنید.
 ب) اگر $A \in Sl_2(\mathbb{R})$ تحت چه شرطی، دو ژئودزیک h و k معرفی شده در قسمت (الف) متقاطع هستند؟ آیا میتوان از روی A ، نقطه تقاطع h و k را صریحا به دست آورد؟ اگر جواب مثبت است برای یک A خاص روش خود را اجرا کنید.

- ۴ نشان دهید ناحیه ای از $sl_2(\mathbb{R})$ متشکل از همه ماتریسهای با نرم -1 همبند است.

- ۵ نشان دهید برای هر مثلث هذلولوی متساوی الاضلاع به طوری که زاویه هر راس آن α و طول هر ضلع آن a باشد داریم $\cosh(a/2) \sin(\alpha/2) = 1/2$.

- ۶ نشان دهید رأسهای یک مثلث متساوی الاضلاع هذلولوی روی یک دایره قرار دارند.

- ۷ تعریف دامنه بنیادی دیریکله برای زیرگروه های گسسته از گروه لورنتس را نوشته و با ذکر یک مثال آن را برای یک زیر گروه گسسته خاص از گروه لورنتس به دست آورید.