

به نام خدا

تاریخ پنجشنبه ۲۱ اردیبهشت ۱۳۹۱

امتحان میان ترم
مدت: ۲¼ ساعت

گروه های خطی

در مسایل زیر همه فضاهای برداری متناهی البعد هستند.

۱ الف) یک زیر گروه آبلی $GL(n, q)$ از مرتبه $q^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$ مثال بزنید. در اینجا q توانی از یک عدد اول است.
ب) یک گروه ساده از مرتبه 504 مثال بزنید.

۲ میدان متناهی q عضوی F و فضای برداری n بعدی V روی F را در نظر می گیریم.
الف) تعداد ترابرها را در $SL(V)$ بیابید.
ب) نشان دهید $SL(V)$ با کمتر از $n - 1$ ترابری تولید نمی شود.

۳ از قسمت های این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید:
الف) فرم دوخطی ناتبگون متناوب $b: V \times V \rightarrow F$ را در نظر می گیریم. نشان دهید گروه $SP(V, b)$ به وسیله ترابرهایی سیمپلکتیک تولید می شود.
ب) فضای برداری V روی میدان F را در نظر می گیریم. نشان دهید دو ترابری $\tau_1, \tau_2 \in SL(V)$ در $GL(V)$ مزدوج هستند و اگر $\dim V > 2$ آنگاه در $SL(V)$ هم مزدوج هستند.

۴ فرض کنید $b: V \times V \rightarrow F$ یک فرم دوخطی بازتابی باشد. فرض کنید σ یک ایزومتری (V, b) باشد.
الف) اگر W یک زیرفضای V باشد که تحت σ ثابت باشد نشان دهید W^\perp تحت σ پایاست.
ب) اگر W یک زیرفضای ناتبگون باشد آنگاه $O(W^\perp, b|_{W^\perp \times W^\perp}) \simeq \text{Stab}_{O(V, b)}(W)$.

۵ کوچکترین گروه سیمپلکتیک تصویری ساده که مرتبه آن با هیچ گروه ساده متناوب و هیچ گروه خطی خاص تصویری ساده منطبق نباشد را شناسایی کنید.

۶ فرض کنید K یک میدان و A یک زیر جبر از $M_n(K)$ باشد. فرم دوخطی $b: A \times A \rightarrow K$ تعریف شده به وسیله $b(x, y) = \text{tr}(xy)$ را در نظر می گیریم.
الف) نشان دهید اگر b ناتبگون باشد آنگاه $J(A) = 0$.
ب) نشان دهید اگر $\text{char}(K) = 0$ و $J(A) = 0$ آنگاه b ناتبگون است.
ج) اگر $\text{char}(K) \neq 0$ آیا حکم قسمت قبل معتبر است؟

موفق باشید