به نام خدا

گروه های خطی

امتحان پایان ترم

مدت: ۲$\frac{1}{2}$ ساعت

تاریخ چهارشنبه ۲۴ خرداد ۱۳۹۱

در مسایل زیر V یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان F از مشخصه مخالف 2 و $q : V \to F$ یک فرم مربعی ناتبهگون است. تبدیل انعکاسی از V به V در امتداد بردار آنیزوتروپ u با σ_u نمایش داده می شود.

۱ فرم دوخطی $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت زیر را در نظر می گیریم. علامت b را به دست آورید.

$$b(x, y) = x^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y, \qquad (x,\ y \in \mathbb{R}^3)$$

۲ فرض کنید τ یک برگردان در $O(V, q)$ باشد. نشان دهید زیرفضای ناتبهگون U از V موجود است به طوری که $\tau|_U = -id$ و $\tau|_{U^\perp} = id$

۳ الف) فرض کنید u و v دو بردار آنیزوتروپ در V باشند و $q(u) = q(v)$. نشان دهید $\sigma_u\sigma_v \in \Omega(V, q)$.
ب) اگر $\dim V = 2$ نشان دهید $\Omega(V, q) = \ker\theta$ که در اینجا $\theta : SO(V, q) \to F^\times/F^{\times 2}$ نرم اسپینوری است.

۴ فرض کنید F یک میدان متناهی q عضوی و $n = \dim V \geqslant 3$. نشان دهید $SO(V, q)$ دارای یک زیرگروه آبلی از مرتبه حداقل q^{n-2} است. آیا این کران پایین را می توان بهتر کرد؟

۵ فرض کنید $n = \dim V$.
الف) اگر u و v دو بردار آنیزوتروپ متعامد در V باشند آنگاه نشان دهید $\sigma_u\sigma_v$ یک نیمدور در $SO(V, q)$ است.
ب) اگر $n \geqslant 3$ و $\tau \in SO(V, q)$ آنگاه نشان دهید τ را می توان به صورت حاصلضرب حداکثر $2[n/2]$ تا نیمدور نوشت.
ج) اگر $n = 2$ آیا حکم قسمت (ب) معتبر است؟
د) $n \geqslant 4$ زوج باشد آیا $\tau \in SO(V, q)$ موجود است به طوری که به صورت حاصلضرب اکیدا کمتر از n تا نیمدور نتواند بیان شود؟

موفّق باشید