

۱ نشان دهید برای هر عدد صحیح $n > 0$ داریم $\sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right) = n$ در اینجا μ تابع موبیوس و σ تابع مجموع مقسوم علیه های مثبت يك عدد است.

۲ الف) فرض کنید عدد صحیح مثبت d بر يك عدد اول p به صورت $4k + 3$ بخش پذیر باشد. نشان دهید معادله دیوفانتی $x^2 - dy^2 = -1$ جواب ندارد.

ب) همه جوابهای معادله دیوفانتی $z^3 = y^2 + 4$ وقتی y فرد باشد را بیابید.

۳ الف) همه فرمهای مربعی دو متغیره تقلیل یافته با مبین 8 را تعیین کنید.

ب) نشان دهید دو فرم مربعی دو متغیره $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ و $g(x, y) = -x^2 + 2y^2$ هم ارز هستند.

ج) همه اعداد اول p که به صورت $x^2 - 2y^2$ قابل نمایش هستند را مشخص کنید.

د) فرم مربعی $4x^2 + 17xy + 20y^2$ را به صورت تقلیل یافته در آورید.

۴ با استفاده از روش RSA با کلید عمومی $(33, 7)$ پیام $m = 2$ را امضا کنید.

۵ الف) همه ریشه های اولیه به پیمانۀ 5 را پیدا کنید. همچنین حداقل يك ریشه اولیه به پیمانۀ اعداد 25، 50 و 125 بیابید.

ب) نشان دهید برای هر عدد اول p مجموع همه ریشه های اولیه متمایز به پیمانۀ p همنهشت با $\mu(p-1)$ است (در اینجا μ تابع موبیوس است).

۶ الف) سمبل ژاکوبی $\left(\frac{35}{87}\right)$ را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید حاصلضرب همه مانده های مربعی متمایز به پیمانۀ عدد اول فرد p همنهشت با $\left(\frac{-1}{p}\right)$ است.

ج) همه اعداد اول q به طوری که $\left(\frac{5}{q}\right) = -1$ را شناسایی کنید.

۷ الف) اگر دو عدد صحیح به صورت مجموع دو مربع صحیح قابل بیان باشند آنگاه آیا حاصلضرب آنها نیز اینچنین است؟

ب) اگر دو عدد صحیح به صورت مجموع سه مربع صحیح قابل بیان باشند آنگاه آیا حاصلضرب آنها نیز اینچنین است؟

ج) همه اعداد بین 101 تا 110 را شناسایی کنید که به صورت مجموع سه مربع صحیح قابل بیان باشند ولی به صورت مجموع دو مربع صحیح قابل بیان نباشند.

د) همه اعداد بین 101 تا 110 را شناسایی کنید که به صورت مجموع چهار مربع صحیح قابل بیان باشند ولی به صورت مجموع سه مربع صحیح قابل بیان نباشند.

ه) چند عدد اول گاوسی دو به دو غیر شریک با نرم کمتر از 13 وجود دارد؟

موفق باشید