

- ۱ از قسمت های این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.
الف) نشان دهید $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ یک میدان است ولی $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ میدان نیست.
ب) یک چند جمله ای تحویل ناپذیر درجه 3 روی $\mathbb{Z}/3$ مثال بنویسید و توضیح دهید با استفاده از آن چگونه می توان یک میدان 27 عضوی ساخت.
- ۲ الف) فرض کنید U, V و W زیرفضاهایی از یک فضای برداری متناهی البعد باشند. آیا رابطه $\dim(U + V + W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W)$ برقرار است؟
ب) فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و V_1, \dots, V_m ابرزیرفضاهایی از آن باشند. نشان دهید $\dim(V_1 \cap \dots \cap V_m) \geq n - m$.
- ۳ الف) فرض کنید e_1, \dots, e_4 پایه استاندارد \mathbb{R}^4 باشد. نشان دهید $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ را نمی توان به صورت $x \wedge y$ برای $x, y \in \mathbb{R}^4$ بیان کرد.
ب) فرض کنید K یک میدان و $f: K^n \rightarrow K$ یک تابع خطی باشد. نشان دهید $a \in K^n$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in K^n$ داریم $f(x) = a \cdot x$. در اینجا منظور از $a \cdot x$ ضرب داخلی a و x است.
- ۴ فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی بالامثلثی باشد که همه درایه های قطر اصلی و بالای قطر اصلی آن برابر با 1 باشند. وارون A را با استفاده از روش گاوس-ژوردان پیدا کنید.
- ۵ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم.
الف) فرم پلکانی کاهش یافته A را به دست آورید.
ب) پایه ای برای فضای سطری، فضای ستونی و فضای پوچ A به دست آورید. رتبه A را نیز محاسبه کنید.
- ۶ دو ماتریس مربعی هم اندازه A و B را در نظر می گیریم.
الف) نشان دهید اگر حداقل یکی از این دو ماتریس وارون پذیر باشند آنگاه رابطه $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$ برقرار است.
ب) دو ماتریس A و B را پیدا کنید به طوری که $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$.
- ۷ ماتریس مربعی A پادمتقارن نامیده می شود هرگاه $A^t = -A$. فرض کنید n یک عدد فرد و $A \in M_n(\mathbb{R})$ یک ماتریس پادمتقارن باشد. نشان دهید $\det(A) = 0$. با ذکر یک مثال نشان دهید این حکم وقتی n زوج باشد ممکن است برقرار نباشد.
- ۸ مجموعه اعداد مختلط، \mathbb{C} ، را به عنوان یک فضای برداری روی \mathbb{R} ، پایه $B = \{1, i\}$ را برای این فضا و عدد مختلط $\gamma = a + bi$ را در نظر می گیریم. نشان دهید نگاشت $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\varphi(z) = \gamma z$ یک تبدیل خطی است. ماتریس این تبدیل خطی را در پایه B بیابید. نشان دهید این ماتریس وارون پذیر است مگر اینکه $\gamma = 0$. همچنین وارون این ماتریس را در حالتی که $\gamma \neq 0$ پیدا کنید.

موفق باشید