

۱ از قسمت های این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.

الف) با استفاده از روش کمترین مربعات نزدیکترین خط گذرنده نسبت به نقاط $(1, 1)$ ، $(2, 3)$ ، $(3, 4)$ ، $(4, 5)$ و $(5, 7)$ را به دست آورید.

ب) با استفاده از روش کمترین مربعات نزدیکترین سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ گذرنده نسبت به نقاط $(1, 1)$ ، $(2, -2)$ ، $(3, 3)$ ، $(4, 4)$ را به دست آورید.

۲ الف) دو ماتریس $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ را در نظر می گیریم. نشان دهید $tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$.

ب) ماتریس همانی I و ماتریس های A و B که همگی $n \times n$ هستند را در نظر می گیریم. آیا $I \otimes A$ و $B \otimes I$ با همدیگر جابجا می شوند؟

ج) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $f(x)$ چند جمله ای مشخصه آن و I ماتریس همانی $m \times m$ باشد. چند جمله ای مشخصه $A \otimes I$ را بر حسب $f(x)$ پیدا کنید.

۳ الف) ماتریسی مثال بزنید به طوری که چند جمله مینیمال آن $x(x-1)^2(x+2)^3$ و چند جمله ای مشخصه آن $x^2(x-1)^3(x+2)^3$ باشد.

ب) چند جمله ای مشخصه یک ماتریس برابر با $(x+1)^3(x-2)^2$ است. دترمینان و اثر (رد) این ماتریس را به دست آورید.

۴ نشان دهید که چند جمله ای مینیمال و مشخصه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

برابر با $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ هستند.

۵ الف) فرم ژوردان ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) تکرر جبری و هندسی همه مقادیر ویژه ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

۶ الف) K یک میدان و ماتریس $A \in M_n(K)$ پوچتوان است. نشان دهید $A^n = 0$.
 ب) فرض کنید A یک ماتریس متقارن با درایه های حقیقی باشد به طوری که مقدار ویژه منفی نداشته باشد. نشان دهید ماتریس B با درایه های حقیقی موجود است به طوری که $A = B^t B$. بر عکس نشان دهید اگر B یک ماتریس با درایه های حقیقی باشد، مقادیر ویژه ماتریس $B^t B$ حقیقی و نامنفی هستند.

۷ الف) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم. ماتریس متعامد Q و ماتریس قطری D را پیدا کنید به طوری که $Q^t A Q = D$. (راهنمایی: چند جمله ای مشخصه A برابر با $(x - 7)^2(x + 2)$ است).
 ب) ماتریس A را به صورت مجموع ماتریسهای متقارن از رتبه یک بنویسید.

۸ الف) آیا ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ قطری شدنی است؟ اگر جواب مثبت است، ماتریس وارونپذیر P را پیدا کنید به طوری که $P^{-1} A P$ قطری باشد.
 ب) دو ماتریس مثال بنزید که دارای چند جمله ای مشخصه یکسان باشند ولی یکی قطری شدنی و دیگری قطری شدنی نباشد.

موفق باشید