

۱ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.

الف) فرض کنید  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $|a| \geq 2$  و  $|b| \geq 2$ . دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$  را در نظر می گیریم. نشان دهید گروه تولید شده به وسیله  $A$  و  $B$  یک گروه آزاد است.  
ب) نشان دهید تنها عضو از مرتبه متناهی در یک گروه آزاد عضو همانی است.  
ج) نشان دهید مرکز یک گروه آزاد غیر آبلی بدیهی است.

۲ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.

الف) فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و  $A$  اشتراک همه ایده آل های اول  $R$  و  $B$  مجموعه همه عناصر پوچتوان  $R$  باشد. نشان دهید  $A = B$ .  
ب) فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی،  $\{1 - xy \mid y \in R\}$  و  $C = \{x \in R \mid \text{وارون پذیر است}\}$  و  $D$  برابر با اشتراک همه ایده آلهای ماکسیمال  $R$  باشد، نشان دهید  $C = D$ .

۳ الف) نشان دهید شرایط زیر برای یک حلقه جابجایی  $R$  معادل اند:

- (i) تنها یک ایده آل ماکسیمال دارد.
  - (ii) مجموعه عناصر غیر وارونپذیر  $R$  تحت جمع بسته هستند.
  - (iii) برای هر  $x \in R$ ، حداقل یکی از دو عضو  $x$  و  $1 - x$  وارونپذیر هستند.
- ب) نشان دهید حلقه  $K[x]/(x^n)$  که در اینجا  $K$  یک میدان است یک حلقه موضعی است.

۴ الف) فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی باشد. نشان دهید  $F^*$  یک گروه دوری است.

ب) فرض کنید  $p$  یک عدد اول،  $K$  یک میدان  $p^n$  عضوی و  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد به طوری که  $m|n$ . نشان دهید  $K$  دارای یک زیرمیدان  $p^m$  عضوی است. بر عکس اگر  $F$  یک زیر میدان  $K$  باشد آنگاه  $m$  موجود است به طوری که  $m|n$  و  $|F| = p^m$ .  
ج) فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی  $q$  عضوی،  $d$  یک عدد صحیح مثبت و  $S_d = \sum_{x \in F} x^d$ . مقدار  $S_d$  را در دو حالت  $d \mid q - 1$  و  $d \nmid q - 1$  محاسبه کنید.

۵ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.

الف) فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری و  $\varphi: R \rightarrow R$  یک همومورفیسم حلقه ای پوشا باشد. نشان دهید  $\varphi$  یک به یک است.  
ب) اگر  $R$  یک حلقه نوتری و موضعی و  $m$  ایده آل ماکسیمال یکتای آن باشد آنگاه  $\bigcap_{i=1}^{\infty} m^i = \{0\}$ .

۶ الف) نشان دهید هر دامنه صحیح آرتینی میدان است.

ب) یک حلقه آرتینی نامتناهی غیر از یک میدان مثال بنزید.  
ج) آیا یک زیر حلقه یک حلقه آرتینی، آرتینی است؟ چرا؟

۷ الف) نشان دهید  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$  و  $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ب) آیا  $\mathbb{R}[x]/(x^2)$  با یکی از دو حلقه قسمت قبل ایزومورف است؟ چرا؟  
ج) رادیکال پوچ و رادیکال جیکوبسون هر یک از سه حلقه معرفی شده در قسمتهای (الف) و (ب) را به دست آورید.

۸ تعریف رابطه ترتیب و میدان مرتب را بیان کنید. نشان دهید میدان اعداد مختلط و میدانهای متناهی مرتب نیستند. نشان دهید رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی تنها رابطه ترتیب روی میدان اعداد حقیقی است. میدانی مثال بنزید که دو رابطه ترتیب متمایز داشته باشد.