

- الف) فرض کنید  $k$  یک میدان و  $F, G \in k[x, y]$  دو چندجمله ای باشند که عامل مشترک نداشته باشند. نشان دهید  $V(F, G)$  یک مجموعه متناهی است. (۸ نمره)
- ب) آیا حکم قسمت الف) برای سه چند جمله ای  $F, G, H \in k[x, y, z]$  هم برقرار است؟ (۵ نمره)
- ج) فرض کنید  $F \in k[x, y]$  یک چندجمله ای تحویلناپذیر و  $V(F)$  نامتناهی باشد. ثابت کنید  $I(V(F)) = (F)$ . (۵ نمره)

الف) بستر مجموعه های زیر را در  $\mathbb{R}^2$  نسبت به توپولوژی زاریسکی پیدا کنید.

- $A = \{(\sin t, \cos t) \mid 0 < t \leq \pi/2\}$  (۲ نمره)
- $B = \mathbb{Z} \times \{0\}$  (۲ نمره)
- $C = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (۲ نمره)
- $D = \{(t, \tan t) \mid t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} : t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$  (۲ نمره)
- $E = \{(t, e^t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  (۲ نمره)
- ب) با ذکر یک مثال نشان دهید یک مجموعه همبند  $\mathbb{R}^2$  با توپولوژی زاریسکی لزومی ندارد در توپولوژی اقلیدسی همبند باشد. (۵ نمره)
- ج) با ذکر یک مثال نشان دهید یک مجموعه همبند  $\mathbb{R}^2$  با توپولوژی اقلیدسی لزومی ندارد در توپولوژی زاریسکی تحویلناپذیر باشد. (۵ نمره)

- ۳ فرض کنید  $k$  یک میدان بسته جبری باشد. نشان دهید دو حکم زیر معادلند: (۱۰ نمره)
- برای هر ایده آل سره  $I$  در  $k[x_1, \dots, x_n]$  داریم  $V(I) \neq \emptyset$ .
- اگر  $J$  یک ایده آل در  $k[x_1, \dots, x_n]$  باشد آنگاه  $I(V(J)) = \sqrt{J}$ .

- ۴ الف) فرض کنید  $k$  یک میدان بسته جبری و  $I$  یک ایده آل در  $k[x_1, \dots, x_n]$  باشد. نشان دهید  $V(I)$  متناهی است اگر و تنها اگر  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  یک فضای برداری متناهی البعد روی  $k$  باشد. همچنین اگر  $V(I)$  متناهی باشد آنگاه  $V(I)$  حداکثر به اندازه  $\dim_k(k[x_1, \dots, x_n]/I)$  عضو دارد. (۸ نمره)
- ب) برای ایده آل  $I = (y^2 - x^2, y^2 + x^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$ ، مجموعه  $V(I)$  را شناسایی کنید همچنین  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x, y]/I)$  را بیابید. (۸ نمره)

- ۵ الف) مجموعه  $V(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$  را به مولفه های تحویلناپذیر تجزیه کنید. (۸ نمره)
- ب) برای مجموعه  $V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{C}) \mid t \in \mathbb{C}\}$ ، ایده آل  $I(V)$  را پیدا کنید و نشان دهید  $V$  تحویل ناپذیر است. (۸ نمره)

موفق باشید