

۱) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم.

- (الف) همه مقادیر ویژه A را پیدا کنید. (۲ نمره)
 (ب) دو بردار ویژه مستقل خطی برای A بیابید. (۴ نمره)
 (ج) ماتریس متعامد P و ماتریس قطری D را چنان بیابید که $P^t A P = D$. (۲ نمره)
 (د) فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تبدیل خطی متناظر با A باشد. رتبه A را به دست آورید. (۲ نمره)

۲) انحنا، تاب و کنج فرنه را در هر نقطه از خم داده شده به وسیله $\gamma(t) = (t + \cos(t), t - \cos(t), \sqrt{2} \sin(t))$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

۳) متغیرهای x, y, u, v به وسیله معادلات $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$ با هم رابطه دارند. نقطه

$P = (x, y, u, v) = (2, 1, 3, 2)$ در این معادلات صدق می کند. نشان دهید در مجاورت این نقطه می توان x و y را بر حسب u و v به دست آورد. همچنین $\frac{\partial x}{\partial v}$ و $\frac{\partial x}{\partial u}$ را در این نقطه به دست آورید. (۱۰ نمره)

۴) نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ را بیابید و نوع آنها را شناسایی کنید. (۱۰ نمره)

۵) ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ و میدان برداری $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم.

- (الف) نشان دهید F یک میدان برداری پایسته است و یک تابع پتانسیل برای F پیدا کنید. (۶ نمره)
 (ب) فرض کنید C پاره خط واصل از نقطه $A = (0, 0)$ تا نقطه $B = (1, 1)$ باشد. مقدار $\int_C F \cdot dr$ را پیدا کنید. (۴ نمره)

۶) دو عدد حقیقی مثبت a و b را در نظر می گیریم. مساحت ناحیه محدود به خم بسته $\gamma(t) = (a \cos^3(t), b \sin^3(t))$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ را بیابید. (۱۰ نمره)

۷) مقدار انتگرال $\iint_S (x^4 + y^4) dS$ را حساب کنید که در اینجا S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ است. (۱۰ نمره)

۸) کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ و صفحه $2x + y + z = 0$ همدیگر را در دایره C قطع می کنند. فرض کنید جهت C چنان باشد که اگر از نقطه $(2, 1, 1)$ به C نگاه کنیم جهت آن خلاف گردش عقربه های ساعت باشد. میدان برداری $F = (x + y, y + z, x + y + z)$ را در نظر می گیریم. مقدار انتگرال $\oint_C F \cdot dr$ را پیدا کنید. (۱۰ نمره)