

- ۱) الف) نشان دهید سری  $\sum \frac{1}{p}$  که مجموع روی همه اعداد اول  $p$  گرفته شده است واگراست. (۸ نمره)  
ب) با استفاده از قضیه اعداد اول ثابت کنید  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{p_n}$ . (۵ نمره)
- ۲) الف) نشان دهید  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$  (۸ نمره)  
ب) تساوی های  $\sigma = \text{id} * I$ ،  $\varphi = \text{id} * \mu$  و  $\sigma * \varphi = \text{id} * \text{id}$  را ثابت کنید. (۷ نمره)  
ج) نشان دهید عدد صحیح  $n > 1$  اول است اگر و تنها اگر  $\sigma(n) + \varphi(n) = n\tau(n)$ . (۷ نمره)  
د) آیا حاصلضرب دیریکله دو تابع اکیدا ضربی، اکیدا ضربی است؟ (۵ نمره)
- ۳) الف) برای هر عدد صحیح  $n \geq 1$  نشان دهید  $n$  عدد صحیح متوالی وجود دارند به طوری که هر یک بر مربع یک عدد صحیح بزرگتر از یک بخشپذیرند. (۶ نمره)  
ب) همه جواب های معادله سیاله  $2x - 3y = 5$  را به دست آورید. (۶ نمره)
- ۴) الف)  $n > 1$  یک عدد صحیح است. اگر دوره تناوب بسط اعشاری  $\frac{1}{n}$  برابر با  $n - 1$  باشد آیا  $n$  اول است؟ (۷ نمره)  
ب) همه اعداد صحیح  $n < 100$  که نسبت به ۱۰ اول باشند و دوره تناوب بسط اعشاری  $\frac{1}{n}$  برابر با ۲ باشد را پیدا کنید. (۶ نمره)
- ۵) الف) اگر  $g$  یک ریشه اولیه به پیمانه  $n$  باشد چگونه می توان ریشه های اولیه دیگر به پیمانه  $n$  را از روی  $g$  پیدا کرد؟ با توجه به اینکه ۲ ریشه اولیه به پیمانه ۱۱ است، همه ریشه های اولیه دیگر را پیدا کنید. (۷ نمره)  
ب) همه جواب های معادله  $7x^5 \equiv 4 \pmod{11}$  را در صورت وجود به دست آورید. (۶ نمره)
- ۶) الف) ایده کلی روش های RSA و دیفی هلمن در رمزنگاری با استفاده از نظریه اعداد را توضیح دهید. (۴ نمره)  
ب) روش RSA با کلید عمومی  $(n, e) = (33, 3)$  را در نظر می گیریم. عدد  $m = 31$  را به صورت رمز در آورید. اگر عدد رمز شده ۴ را دریافت کرده باشیم، عدد اصلی چه بوده است؟ (۴ نمره)  
ج) در روش تبادل دیفی هلمن، به کمک عدد اول  $p = 11$  و ریشه اولیه  $g = 2$ ، دو نفر اعداد ۴ و ۸ را مبادله کرده اند. عدد مشترك انتخاب شده بین آنها چیست؟ (۴ نمره)