

۱ می خواهیم یک مقدار ویژه ماتریس A به صورت زیر را با استفاده از روش تکرری توانی، به طور تقریبی به دست آوریم. یک بردار اولیه مناسب $v_0 \in \mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید و جدول زیر را پر کنید که در آن v_1, v_2, v_3 تکررهای اول، دوم و سوم v_0 هستند و r_0, r_1, r_2 و r_3 نسبت های Rayleigh متناظر هستند. دنباله r_i ها به کدام مقدار ویژه A میل می کند؟ (۸ نمره)

$$\begin{array}{c|c|c|c} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{array}, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

۲ ماتریس A به صورت زیر را در نظر می گیریم.
الف) ماتریس متعامد Q و ماتریس قطری D را پیدا کنید به طوری که $Q^t A Q = D$. (۵ نمره)
ب) ماتریس A را به صورت مجموع سه ماتریس متقارن از رتبه ۱ بنویسید. (۵ نمره)
ج) یک ماتریس 3×3 با مقادیر ویژه $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ متناظر با بردارهای ویژه v_1, v_2, v_3 پیدا کنید. (۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳ الف) توضیح دهید چگونه می توان از تجزیه QR برای محاسبه تقریبی مقادیر ویژه یک ماتریس استفاده کرد. (۶ نمره)

ب) تجزیه QR ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید. (۶ نمره)

۴ الف) نزدیکترین سهمی $y = a + bx + cx^2$ گذرنده نسبت به نقاط $(-1, 4), (0, 4), (1, 4), (2, 0)$ را با استفاده از روش کمترین مربعات به دست آورید. (۶ نمره)

ب) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با درایه های حقیقی باشد. نشان دهید مقادیر ویژه $A^t A$ نامنفی هستند. (۶ نمره)

۵ ماتریس A به صورت مقابل را در نظر می گیریم.
الف) تجزیه مقدار تکین (SVD) ماتریس A را پیدا کنید. (۶ نمره)

ب) عدد حالت A چیست؟ (۲ نمره)

ج) برای بردارهای $x \in \mathbb{R}^2$ مقدار $\max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ را محاسبه کنید. (۳ نمره)

د) شبه وارون A را پیدا کنید. (۴ نمره)

ه) بهترین جواب کمترین مربعات معادله $Ax = b$ که $\|x\|$ کمترین مقدار باشد را به دست آورید. (۲ نمره)

۶ ماتریس A به صورت زیر را در نظر می گیریم.
الف) اگر B یک ماتریس $n \times n$ قطری شدنی باشد آنگاه نشان دهید ماتریس بلوکی C داده شده به صورت زیر نیز قطری شدنی است. (۶ نمره)

ب) حال فرض کنید B ماتریس 3×3 داده شده به صورت زیر باشد. دترمینان C را به دست آورید. (۴ نمره)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} B & 2B \\ 4B & 3B \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

۷ الف) مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر را تعیین کنید و تکرر جبری و هندسی هر یک از آنها را پیدا کنید. (۶ نمره)
ب) فرم ژردان ماتریس B داده شده به صورت زیر را به دست آورید. (۶ نمره)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸ الف) فرض کنید A یک ماتریس متقارن با درایه های حقیقی باشد که مقدار ویژه منفی نداشته باشد. نشان دهید ماتریس A جذر دارد، یعنی ماتریس B با درایه های حقیقی وجود دارد به طوری که $A = B^2$. (۶ نمره)

ب) اگر ماتریس متقارن A با درایه های حقیقی جذر داشته باشد آیا می توان نتیجه گرفت مقادیر ویژه آن نامنفی هستند؟ (۴ نمره)

ج) اگر A متقارن نباشد آیا حکم قسمت الف) برقرار است؟ چرا؟ (۴ نمره)

موفق باشید