

۱ روی یک جعبه پنج چراغ قرار دارد. هر کدام از چراغها یک کلید دارد. هر کدام از چراغها دو وضعیت دارد: وضعیت روشن و وضعیت خاموش. هر گاه کلید مربوط به یک چراغ فشار داده شود وضعیت آن چراغ و چراغهای کناری عوض می شوند. فرض کنید در ابتدا همه چراغها خاموش باشند. آیا می توان با فشار دادن پیاپی کلیدها به وضعیتی رسید که فقط چراغ اول روشن بماند؟ چگونه؟ (۸ نمره)

۲ دستگاه زیر برای چه مقادیری از پارامتر k الف) اصلا جواب ندارد؟
ب) جواب یکتا دارد؟
ج) تعداد نامتناهی جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = k \\ 2x - y + 4z = k^2 \end{cases}$$

(۸ نمره)
(۸ نمره)
(۸ نمره)

۳ با استفاده از روش پلکانی کاهش یافته، جواب یا جوابهای دستگاه زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 2 \end{cases}$$

(۸ نمره)

۴ الف) با استفاده از روش گاوس-ژوردان وارون ماتریسهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.
ب) دترمینان A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۵ دستگاه زیر را در نظر می گیریم. با استفاده از روش تکرری ژاکوبی با مقدار اولیه (جواب تقریبی اول) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ شروع کرده، جواب های تقریبی دوم، سوم و چهارم این دستگاه را به دست آورید.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

۶ ماتریس A به صورت زیر را در نظر می گیریم.
الف) همه مقادیر ویژه A را پیدا کنید.
ب) برای هر مقدار ویژه همه بردارهای ویژه متناظر را پیدا کنید.

ج) بردار $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی بردارهای ویژه A بنویسید.
د) مقدار $A^{10}v$ را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(۸ نمره)
(۸ نمره)
(۸ نمره)
(۸ نمره)

۷ الف) ماتریس استاندارد تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که هر نقطه را نسبت به گذرنده از مبدأ که عمود بر بردار $v = (1, 1, 1)$ است انعکاس می دهد را پیدا کنید.
ب) ماتریس استاندارد تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ که هر نقطه را روی خط $y = x$ تصویر می کند، سپس نقطه به دست آمده را به اندازه 90° در جهت پادساعتگرد دوران می دهد.

(۸ نمره)

۸ A یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی است. نشان دهید $\text{rank}(A^t A) = \text{rank}(A)$. اگر درایه های A حقیقی نباشند آیا این حکم برقرار نیست؟ (۸ نمره)

۹ ماتریس A بصورت زیر داده شده است. برای فضاها $\text{row}(A)$ ، $\text{col}(A)$ و $\text{null}(A)$ یک پایه پیدا کنید. (۸ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$