

دانشگاه صنعتی شریف

جبر پیشرفته

امتحان میان ترم

تاریخ پنجشنبه ۲۲ آذر ۱۳۸۶

مدت: ۳ ساعت

- ۱ الف) تعریف حاصلضرب دوگان (coproduct) را در یک کتگوری بیان کرده و در کتگوری مجموعه‌ها حاصلضرب دوگان دو مجموعه را مشخص کنید.
 ب) آیا می‌توانید تعریف مناسبی برای «شیئی خارج قسمت» در یک کتگوری ارائه کنید؟ (این تعریف باید با مفهوم شیئی خارج قسمت در کتگوری‌های آشنا مانند کتگوری مدول‌ها همخوانی داشته باشد).
 ج) آیا در کتگوری مجموعه‌ها شیئی انتهایی وجود دارد؟
- (۵ نمره)
 (۵ نمره)
 (۵ نمره)

۲ الف) دنباله

$$X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0 \quad (*)$$

از A -مدول‌ها داده شده است. اگر برای هر A مدول Y دنباله

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X'', Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X', Y)$$

- دقیق باشد، نشان دهید دنباله (*) نیز دقیق است.
 ب) دنباله دقیق $0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow 0$ از فضاهای برداری داده شده است؛ نشان دهید $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$.
- (۱۰ نمره)
 (۵ نمره)

- ۳ الف) E یک A -مدول و M یک زیرمدول آن است. نشان دهید دوگان E/M با یک زیرمدول E' از دوگان E ایزومورف است. مدول E' را به طور صریح مشخص کنید.
 ب) اگر G یک گروه آبلی متناهی باشد نشان دهید $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq_{\mathbb{Z}} G$. اگر G نامتناهی باشد آیا این حکم برقرار نمی‌ماند؟ چرا؟
- (۱۰ نمره)

- ۴ الف) فرض کنید A یک دامنه صحیح و E یک A مدول باشد. نشان دهید E_{tor} یک زیرمدول E است. با ذکر یک مثال نشان دهید اگر A دامنه صحیح نباشد، E_{tor} زیرمدول E نیست.
 ب) فرض کنید E یک مدول متناهی تولید شده روی یک PID باشد. آنگاه E/E_{tor} یک مدول آزاد است. همچنین یک زیرمدول آزاد F از E هست که $E = E_{tor} \oplus F$.
 ج) نشان دهید یک \mathbb{Z} -مدول تصویری است اگر و تنها اگر آزاد باشد.
 د) با ذکر یک مثال نشان دهید یک مدول تصویری لزوماً آزاد نیست.
- (۵ نمره)
 (۱۰ نمره)
 (۵ نمره)
 (۵ نمره)

- ۵ الف) نمودار جابجایی زیر از R -مدول‌ها که هر دو سطر آن دقیق هستند را در نظر می‌گیریم. اگر f پوشا و g یک‌به‌یک باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت h یک‌به‌یک است؟

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \end{array}$$

- (۵ نمره)
 ب) تعریف طول یک مدول را بیان کرده و طول \mathbb{Z} -مدول $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ و \mathbb{R} -مدول \mathbb{C} را پیدا کنید.

موفق باشید