دانشگاه صنعتی شریف

جبر پیشرفته | امتحان پایان‌ترم | تاریخ شنبه ۱۵ دی ۱۳۸۶

مدت: ۳ ساعت

---

۱ R یک حلقه جابه‌جایی است.

الف) R-مدول‌های چپ E, F و G را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\mathrm{Hom}_R(E\otimes_R F, G)\simeq_R \mathrm{Hom}_R(E, \mathrm{Hom}_R(F,G))\ .$$

ب) ایده‌آل‌های I و J از R را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید: $\dfrac{R}{I}\otimes_R \dfrac{R}{J}\simeq_R \dfrac{R}{I+J}$.

ج) نشان دهید یک R-مدول هومومورفیسم پوشای یکتا از $I\otimes_R J$ به IJ هست به‌طوری‌که برای هر $i\in I$ و $j\in J$ ، $i\otimes j$ را به ij می‌فرستد. همچنین با ذکر یک مثال نشان دهید این نگاشت لزوما یک‌به‌یک نیست.

۲ الف) نشان دهید هر مدول تصویری، فلت است. همچنین با ذکر یک مثال نشان دهید مدول‌های فلت، لزوما تصویری نیستند.

ب) فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی، F یک R-مدول فلت و $0\to N\to M\to F\to 0$ یک دنباله دقیق از R-مدول‌ها باشد. آنگاه برای هر R-مدول E دنباله $0\to N\otimes E\to M\otimes E\to F\otimes E\to 0$ نیز دقیق است. همچنین با ذکر یک مثال نشان دهید اگر F فلت نباشد این حکم لزوما برقرار نمی‌ماند.

ج) فرض کنید R یک PID و F یک R-مدول باشد. نشان دهید F فلت است اگر و تنها اگر خالی از تاب باشد.

۳ الف) R یک دامنه صحیح است. اگر R به‌عنوان R-مدول، انژکتیو باشد آنگاه R یک میدان است. همچنین با ذکر یک مثال نشان دهید حلقه جابه‌جایی R وجود دارد که میدان نیست ولی ${}_RR$ انژکتیو است.

ب) A یک حلقه و Q یک A-مدول است. نشان دهید هر دنباله دقیق $0\to Q\to M\to M''\to 0$ از A-مدول‌ها شکافته می‌شود اگر و تنها اگر Q دارای این خاصیت باشد که برای هر مونومورفیسم $i: M'\to M$ از A-مدول‌ها و هر A-مدول هومومورفیسم $f: M'\to Q$ یک A-مدول هومومورفیسم یکتای $h: M\to Q$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار زیر جابه‌جایی شود:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

۴ A یک حلقه است.

الف) نشان دهید A-مدول E دارای یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر E هم آرتینی و هم نوتری باشد.

ب) فرض کنید M یک A-مدول چپ و $f: M\to M$ هومومورفیسم باشد. اگر M نوتری چپ و f پوشا باشد آنگاه f ایزومورفیسم است.

ج) فرض کنید A جابه‌جایی، نوتری و موضعی و M ایده‌آل ماکسیمال آن باشد. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری‌که $M^n = M^{n+1}$ آنگاه $M^n=0$.

۵ الف) نشان دهید حلقه اندومورفیسم‌های هر مدول ساده، حلقه تقسیم است. همچنین با ذکر یک مثال نشان دهید حلقه اندومورفیسم‌های یک مدول می‌تواند یک حلقه تقسیم شود بدون اینکه مدول، ساده باشد.

ب) اگر R یک حلقه آرتینی چپ باشد آنگاه $J(R)$ یک ایده‌آل پوچتوان است.

موفق باشید