

۱. فرض کنید  $u$  و  $v$  بردارهایی دلخواه در  $\mathbb{R}^n$  اند و  $v \neq 0$ .

الف) عدد حقیقی  $\lambda$  را طوری تعیین کنید که طول بردار  $u + \lambda v$  حداقل ممکن باشد. (۴ نمره)

ب) برای این  $\lambda$  نشان دهید  $u + \lambda v$  عمود بر  $v$  است. (۴ نمره)

۲. نگاشت خطی یک به یکی از  $\mathbb{R}^4$  به  $\mathbb{R}^4$  بیابید که زیر فضای خطی مشخص شده با معادله  $x_4 = 0$  را به زیر فضای مشخص شده با معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  بنگارد. (ماتریس نمایش آن را در پایه استاندارد بنویسید). (۸ نمره)

۳. ماتریس  $A$  را پاد متقارن گوییم هرگاه  $A^t = -A$  و ماتریس  $B$  را متعامد گوییم هرگاه  $B^t B = I$ .

الف) نشان دهید برای  $n$  های فرد، دترمینان ماتریسهای پادمتقارن  $n \times n$  صفر است. (۴ نمره)

ب) تمام ماتریسهای  $2 \times 2$  را که هم پاد متقارن هستند و هم متعامد بدست آورید. (۴ نمره)

۴. ماتریس رو برو نمایش ماتریسی نگاشتی خطی از  $\mathbb{R}^4$  به  $\mathbb{R}^4$  (در پایه استاندارد) است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) مقدارهای ویژه  $A$  را بدست آورید. (۴ نمره)

ب) یک پایه از بردارهای ویژه  $A$  ارائه دهید. (۴ نمره)

ج) یک پایه متعامد و یکه برای تصویر  $A$  بیابید. (۴ نمره)

۵. خم زیر در  $\mathbb{R}^4$  مفروض است.

$$\gamma(t) = (\cos t - \sin t - t, \cos t - \sin t + t, \cos t + \sin t - t, \cos t + \sin t + t)$$

الف) نشان دهید تصویر این خم داخل ابر صفحه‌ای عمود بر بردار  $(1, -1, -1, 1)$  قرار دارد. (۲ نمره)

ب) تعریف مناسبی برای انحنای یک خم در  $\mathbb{R}^4$  ارائه دهید و انحنای خم بالا را محاسبه کنید. (۴ نمره)

۶. فرض کنید برای خم  $\gamma(t)$  در  $\mathbb{R}^3$  بردارهای  $\vec{T}$ ،  $\vec{N}$  و  $\vec{B}$  تعریف شده اند و همچنین فرض کنید تصویر خم  $\gamma$  روی کره‌ای به مرکز مبدأ قرار دارد و  $\vec{B}$  نیز همه‌جا بر سطح آن کره مماس است.

الف) توضیح دهید چرا  $\vec{N}$  همه‌جا بر سطح کره عمود است. (۲ نمره)

ب) نشان دهید  $\tau$  همواره صفر است. (و در نتیجه تصویر یک خم در یک صفحه قرار دارد). (۴ نمره)

ج) نشان دهید تصویر  $\gamma$  (بخشی از) یک دایره عظیمه است. (۲ نمره)

موفق باشید.