

دانشگاه صنعتی شریف

هندسه جبری مقدماتی

امتحان میان ترم

تاریخ یکشنبه ۳۰ اردیبهشت ۱۳۸۶

مدت: ۳ ساعت

- ۱) مفاهیم زیر را به طور دقیق تعریف کنید.
توپولوژی زاریسکی، حلقه مختصاتی یک مجموعه جبری آفین.
(۱۰ نمره)
- ۲) الف) فرض کنید k یک میدان و $F, G \in k[x, y]$ دو چندجمله‌ای باشند که عامل مشترک نداشته باشند. آنگاه $V(F, G)$ یک مجموعه متناهی است.
ب) فرض کنید $F \in k[x, y]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد و $V(F)$ نامتناهی باشد. ثابت کنید $I(V(F)) = (F)$.
ج) فرض کنید $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ و f تحویل‌ناپذیر و $\deg f \geq 1$. نشان دهید اگر $V(f) \subset V(g)$ آنگاه $f|g$.
(۶ نمره)
- ۳) k یک میدان است. فرض کنید E یک زیرمجموعه متناهی k^n باشد.
الف) اگر $n = 1$ نشان دهید چندجمله‌ای $f \in k[x]$ موجود است به طوری که $E = V(f)$.
ب) اگر $n = 2$ ، نشان دهید چندجمله‌ای‌های $f, g \in k[x, y]$ موجودند به طوری که $E = V(f, g)$.
(۴ نمره)
- ۴) الف) فرض کنید k یک میدان و C یک خم مسطح آفین و L یک خط در k^2 است. فرض کنید $L \not\subset C$ و $C = V(F)$ که $F \in k[x, y]$ یک چندجمله‌ای از درجه n است. نشان دهید $L \cap C$ یک مجموعه متناهی با حداکثر n نقطه است.
ب) آیا مجموعه نقاط \mathbb{R}^2 که مختصات قطبی‌شان (r, θ) در $r = \sin 2\theta$ صدق می‌کند یک مجموعه جبری آفین است؟
ج) بستر $\{(t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$ را در \mathbb{R}^2 نسبت به توپولوژی زاریسکی پیدا کنید.
(۴ نمره)
- ۵) الف) فرض کنید k یک میدان باشد و $V \subset k^n$ و $W \subset k^m$ دو مجموعه جبری آفین باشند. همچنین فرض کنید $\varphi: V \rightarrow W$ یک نگاشت چندجمله‌ای باشد. آنگاه φ یک ایزومورفیسم است اگر و تنها اگر φ^* یک ایزومورفیسم حلقه‌ای باشد.
ب) k یک میدان نامتناهی است. همه اتومورفیسم‌های k^1 را پیدا کنید.
(۵ نمره)
- ۶) الف) نشان دهید چندجمله‌ای $F = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ تحویل‌ناپذیر است ولی $V(F)$ در \mathbb{R}^2 تحویل‌پذیر است.
ب) نشان دهید چندجمله‌ای $G = x^3 + x - x^2y - y \in \mathbb{R}[x, y]$ تحویل‌پذیر است ولی $V(G)$ در \mathbb{R}^2 تحویل‌ناپذیر است.
(۵ نمره)
- ۷) الف) K یک میدان است. آیا مجموعه $C := \{(t^2, t^3) : t \in K\}$ یک مجموعه جبری آفین در K^2 است؟ آیا C تحویل‌ناپذیر است؟
ب) k یک میدان است. فرض کنید $C = V(xy - 1) \subset k^2$. آیا هر نگاشت چندجمله‌ای از k^n به C ، نگاشت ثابت است؟
(۳ نمره)

موفق باشید