

# دانشگاه صنعتی شریف

هندسه جبری مقدماتی

امتحان پایان ترم

تاریخ چهارشنبه ۲۳ خرداد ۱۳۸۶

مدت: ۳ ساعت

۱) مفاهیم زیر را به طور دقیق تعریف کنید: نقطه عطف یک خم جبری، خم هسیان منسوب به یک خم جبری، نقطه تکین (منفرد) یک خم جبری، برآیند دو چندجمله‌ای، چندجمله‌ای همگن، چندجمله‌ای مینیمال یک خم جبری، مخروط آفین یک زیرمجموعه از فضای تصویری، تعریف هندسی خم‌های مخروطی (با استفاده از کانون و هادی)، بعد کرول یک مجموعه جبری آفین، ایده‌آل همگن.

۲) الف) تعریف عدد تقاطع دو چندجمله‌ای دومتغیره روی یک میدان را، با ذکر خواص طبیعی که باید در آن صدق کند، بیان کنید و یکتایی آن را ثابت کنید.  
ب) عدد تقاطع  $y - x^2$  و  $y^3 - (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y$  را در نقطه  $(0, 0)$  پیدا کنید.  
ج) نقاط اشتراک بستر تصویری خم‌های تعریف شده به وسیله  $F = y^2 - x(x-2)(x+1)$  و  $G = y^2 - 2x + x^2$  را در  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  پیدا کنید همچنین عدد تقاطع را در هر نقطه اشتراک محاسبه کنید.  
د) نقاط در بی‌نهایت خم‌های تعریف شده به وسیله  $F$  و  $G$  را پیدا کنید.

۳) الف) یک میدان  $k$  نشان دهید  $C := \{(a^2 : ab : b^2) \mid a, b \in k, (a, b) \neq (0, 0)\}$  یک خم جبری تصویری در  $\mathbb{P}^2(k)$  است. همچنین اگر  $k$  بسته جبری باشد نشان دهید  $C$  تحویل‌ناپذیر است.  
ب) همه مجموعه‌های جبری تصویری را در  $\mathbb{P}^1(k)$  مشخص کنید.  
ج)  $n$  یک عدد صحیح مثبت است. نشان دهید هر تبدیل تصویری  $T : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  دارای یک نقطه ثابت است. اگر  $\mathbb{C}$  را با  $\mathbb{R}$  جایگزین کنیم آیا این حکم برای  $n = 1$  و  $n = 2$  برقرار نمی‌ماند؟  
د) نشان دهید رادیکال یک ایده‌آل همگن، همگن است.

۴) الف) یک حلقه جابجایی و یک‌دار است.

الف) برای هر زیرمجموعه  $S$  در  $A$  و برای هر زیرمجموعه  $Y$  در  $\text{Spec } A$ ، تعریف  $V(S)$  و  $I(Y)$  را بیان کنید.  
ب) نشان دهید  $\text{Spec } A$  تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر  $\sqrt{0}$  یک ایده‌آل اول در  $A$  باشد.  
ج) نشان دهید  $f \in A$  پوچتوان است اگر و تنها اگر  $D(f)$  تهی باشد.

۵) الف) فرض کنید  $k$  یک میدان از مشخصه صفر باشد. آنگاه هر خم جبری تصویری تحویل‌ناپذیر در  $\mathbb{P}^2(k)$  فقط تعداد متناهی نقطه تکینگی دارد.  
ب)  $k$  یک میدان است و  $P(x) \in k[x]$ . نشان دهید خم تعریف شده به وسیله  $y = P(x)$  نقطه تکین در بی‌نهایت دارد اگر و تنها اگر  $\deg P(x) \geq 3$ .  
ج) فرض کنید  $X \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  مجموعه جبری تصویری تعریف شده به وسیله  $X = \{(x : y : z : t) \mid x^3 = yzt\}$  باشد. مشخص کنید که آیا  $X$  هموار است یا نه و همه نقاط تکینگی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

۶  $k$  یک میدان بسته جبری است. نشان دهید هر خم جبری مکعبی هموار در  $\mathbb{P}^2(k)$  حداقل یک نقطه عطف دارد.

۷  $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$  یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجه فرد است و  $\rho \in \mathbb{C}$  یک ریشه  $g(x)$  است. میدان تولیدشده در  $\mathbb{C}$  به وسیله  $\rho$  و  $\mathbb{Q}$  را  $K$  می‌نامیم. فرض کنید  $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  یک چندجمله‌ای همگن از درجه 2 باشد. اگر  $\alpha \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$  موجود باشد به طوری که  $f(\alpha) = 0$  آنگاه  $\beta \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q})$  موجود است به طوری که  $f(\beta) = 0$ .

موفق باشید