

# دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ چهارشنبه ۲۰ دی ۱۳۸۵

امتحان پایان ترم

جبر ۲

مدت: ۳ ساعت

۱ الف) هر یک از احکام زیر را ثابت کنید یا اگر لازم باشد با ذکر یک مثال رد کنید.

(i) هر حلقه ایده‌آل اصلی، نوتری است.

(ii) هر دامنه تجزیه یکتا، نوتری است.

(iii) هر زیرحلقه یک حلقه جابجایی و یکدار نوتری، نوتری است.

(iv) اگر  $A$  یک حلقه نوتری باشد و  $\varphi: A \rightarrow B$  یک همومورفیسم پوشا باشد آنگاه  $B$  نیز نوتری است.

(v) حلقه توابع پیوسته  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با عمل جمع و ضرب معمولی توابع نوتری نیست.

(ب) ثابت کنید در هر حلقه جابجایی و یکدار آریتی، هر ایده‌آل اول، ماکسیمال است.

۲ الف) عدد صحیح جبری را تعریف کنید. آیا اعداد  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  و  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  صحیح جبری هستند؟

(ب) با استفاده از خاصیت اقلیدسی حلقه اعداد صحیح گاوسی، یکتایی نمایش را در قضیه دو مربع فرما ثابت کنید: اگر عدد

اول  $p \in \mathbb{Z}$  به صورت جمع دو مربع نوشته شود آنگاه این نمایش یکتاست. آیا حکم وقتی  $p$  اول نباشد نیز برقرار است؟

(ج) فرض کنید  $a = -5 + 20i$  و  $b = 3 + 5i$ . چند زوج  $(q, r)$ ،  $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ ، وجود دارد به طوری که  $a = bq + r$  و

$N(r) < N(b)$ ؟ همه این زوج‌ها را پیدا کنید. (در اینجا  $N(x + iy) = x^2 + y^2$  برای  $x, y \in \mathbb{Z}$ ).

۳ الف) برای هر عدد اول  $p$  و هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، یک و تنها یک میدان متناهی  $p^n$  عضوی وجود دارد.

(ب)  $\mathbb{F}_{64}$  چند زیرمیدان دارد؟

(ج)  $F$  یک میدان متناهی است. می‌دانیم برای هر زیرگروه  $H$  از  $F^*$ ،  $H \cup \{0\}$  یک زیرمیدان  $F$  است. نشان دهید  $|F^*|$  یا

برابر با 1 است یا یک عدد اول به صورت  $2^n - 1$ .

(د) میدان شکافنده چندجمله‌ای  $x^2 + x + 2$  را روی  $\mathbb{F}_3$  پیدا کنید.

۴ الف) اگر  $F$  یک میدان از مشخصه صفر باشد و  $K/F$  یک توسیع میدانی و  $a, b \in K$  روی  $F$  جبری باشند آنگاه  $c \in K$

وجود دارد به طوری که  $F(c) = F(a, b)$ .

(ب) چندجمله‌ای‌های مینیمال  $\sqrt{-3} + \sqrt{2}$  و  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  را روی  $\mathbb{Q}$  پیدا کنید.

(ج) نشان دهید  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})] = 6$ .

۵ الف) نشان دهید چندجمله‌ای  $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$  روی  $\mathbb{Q}$  تحویل‌ناپذیر است.

(ب) با توجه به رابطه  $8 \cos^3(2\pi/7) + 4 \cos^2(2\pi/7) - 4 \cos(2\pi/7) - 1 = 0$  ثابت کنید ترسیم هفت‌ضلعی منتظم با خط

کش و پرگار امکان‌پذیر نیست.

۶ الف) این مفاهیم را به طور دقیق تعریف کنید: لگاریتم گسسته، فاصله همینگ دو بردار، وزن همینگ یک بردار، وزن همینگ یک کد خطی.

(ب) وزن کد خطی 0000, 0121, 0212, 1022, 1110, 1201, 2011, 2102, 2220 (روی  $\mathbb{F}_3$ ) را پیدا کنید. این کد چند

خطا را می‌تواند تصحیح کند و چند خطا را می‌تواند تشخیص دهد؟

موفق باشید