دانشگاه صنعتی شریف

جبر ۳ کارشناسی | امتحان پایان‌ترم | تاریخ یکشنبه ۲۸ خرداد ۱۳۸۵

مدت: ۳ ساعت

---

۱ سه حکم از احکام زیر را ثابت کنید. (۴۵ نمره)

الف) توسیع میدانی از درجه متناهی K/F جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر $a \in K$ موجود باشد به‌طوری‌که $T_{K/F}(a) \neq 0$.

ب) K/F یک توسیع میدانی است و $[K:F]=n$. اگر $a \in K$ و $p(x) = x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ چندجمله ای مینیمال a روی F باشد آنگاه $N_{K/F}(a) = (-1)\alpha_0^{n/m}$ و $T_{K/F}(a) = -\frac{n}{m}\alpha_{m-1}$.

ج) برای یک توسیع n-Kummer ، K/F تعریف گروه $kum(K/F)$ و تزویج $Gal(K/F) \times kum(K/F) \to \mu(F)$ را نوشته، ثابت کنید که این تزویج ناتبهگون است ($\mu(F)$ مجموعه همه ریشه‌های n ام واحد در F است).

د) یک n ضلعی منتظم ساختنی است اگر و تنها اگر $\varphi(n)$ توانی از 2 باشد (φ تابع اویلر است).

ه) فرض کنید K/F یک توسیع گالوایی دوری و σ مولد $Gal(K/F)$ باشد. اگر $u \in K$ آنگاه $T_{K/F}(u) = 0$ اگر و تنها اگر $u = \sigma(a) - a$ برای a ای در K .

و) فرض کنید F یک میدان از مشخصه صفر و $f(x) \in F[x]$ یک چندجمله‌ای باشد. آنگاه f به‌وسیله رادیکالها قابل‌حل است اگر و تنها اگر گروه گالوای $f(x)$ یک گروه حلپذیر باشد.

---

۲ الف) فرض کنید K/F یک توسیع میدانی از درجه متناهی از میدانهای متناهی باشد. با استفاده از قضیه 90 هیلبرت نشان دهید تابع نرم $N_{K/F} : K \to F$ پوشاست. (۵ نمره)

ب) فرض کنید $n \geqslant 3$ یک عدد صحیح و $\omega \in \mathbb{C}$ یک ریشه n ام اولیه واحد باشد. نشان دهید $N_{K/\mathbb{Q}}(\omega) = 1$. (۵ نمره)

ج) نشان دهید هر جواب گویای معادله فیثاغورثی $x^2 + y^2 = 1$ به صورت $x = \dfrac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}$ و $y = \dfrac{2st}{s^2 + t^2}$ ($s,\ t \in \mathbb{Q}$) قابل بیان است. (۵ نمره)

۳ الف) گروه گالوای چندجمله‌ای‌های $X^4 + 3X^2 + 2X + 1$ ، $X^4 - 2X^3 - 8X - 3$ و $X^4 - 2$ را روی $\mathbb{Q}$ محاسبه کنید. (۹ نمره)

ب) نشان دهید که چندجمله‌ای $x^5 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ به‌وسیله رادیکالها قابل‌حل نیست. (۵ نمره)

۴ الف) نشان دهید $\mathbb{C}$ بینهایت اتومورفیسم میدانی دارد. (۵ نمره)

ب) با ذکر دلیل تعیین کنید که آیا زیرمیدان F از $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $[\mathbb{R}:F]=2$ یا نه. (۵ نمره)

ج) اگر $u \in \mathbb{R}$ یک عدد جبری ناصفر باشد آنگاه اعداد e^u ، $\cos(u)$ و $\sin(u)$ روی $\mathbb{Q}$ متعالی هستند. (۶ نمره)

۵ الف) نشان دهید که هر توسیع متناهی $\mathbb{Q}$ شامل فقط تعداد متناهی ریشه واحد است. (۵ نمره)

ب) $K/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوایی دوری از درجه n است. با ذکر دلیل تعیین کنید که آیا K شامل یک ریشه n ام اولیه واحد است یا نه. (۵ نمره)

جمع نمرات: ۱۰۰

موفق باشید