

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ پنجشنبه ۱۷ فروردین ۱۳۸۵

امتحان میان ترم

جبر ۱

مدت: ۳ ساعت

۱) الف) نیم گروه S یک گروه است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in S$ معادلات $ax = b$ و $ya = b$ در S دارای جواب باشند.
(۷ نمره)

ب) نشان دهید مرز و درون مربع تشکیل شده در \mathbb{C} به وسیله نقاط $\pm 1, \pm i$ با عمل ضرب معمولی یک نیمگروه است.
(۴ نمره)

۲) الف) یک گروه G و H یک زیرگروه آن است.
الف) فرض کنید $a, b \in G$ نشان دهید که دو همدسته aH و bH یا با هم برابرند و یا اشتراکشان تهی است.
ب) اگر G متناهی باشد نشان دهید که مرتبه H مرتبه G را عاد می کند.
(۷ نمره)

۳) الف) یک گروه متناهی است اگر A و B دو زیرمجموعه ناتهی از G باشند و $|A| + |B| > |G|$ نشان دهید $G = AB$.
ب) اگر G یک نیمگروه متناهی باشد آیا حکم قسمت (الف) برقرار نیست؟ چرا؟
(۷ نمره)

۴) الف) یک گروه G است و H و K دو زیرگروه آن هستند. نشان دهید اگر $H \cup K$ یک زیرگروه G باشد آنگاه یا $H \subset K$ یا $K \subset H$.
ب) اگر H یک زیرگروه سره G باشد نشان دهید زیرگروه تولید شده به وسیله $G \setminus H$ برابر با G است.
ج) اگر در قسمت (الف) به جای کلمه گروه، نیمگروه قرار دهیم، آیا باز حکم برقرار است؟
(۳ نمره)

۵) الف) فرض کنید که C یک گروه دوری از مرتبه n و d یک مقسوم علیه n باشد. آنگاه C دارای یک زیرگروه یکتای از مرتبه d است.
ب) گروه متناهی G دارای این خاصیت است که هر دو زیرگروه آن تو در تو هستند. نشان دهید که G دوری است و مرتبه اش توانی از یک عدد اول است.
(۷ نمره)

۶) الف) نشان دهید که هر جایگشت را می توان به صورت حاصل ضرب ۲ دورها تجزیه کرد.
ب) $\max\{o(a) : a \in S_{10}\}$ را محاسبه کنید.
(۷ نمره)

جمع نمرات: ۷۰

موفق باشید