

# دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ دوشنبه ۲۲ خرداد ۱۳۸۵

امتحان پایان ترم

جر ۱

مدت: ۳ ساعت

- ۱ الف) قضیه کوشی را برای گروه‌های آبلی متناهی ثابت کنید: فرض کنید  $G$  یک گروه آبلی متناهی باشد و  $p$  یک عدد اول که مرتبه  $G$  را عاد کند. آنگاه  $G$  دارای یک عضو از مرتبه  $p$  است.  
ب) نشان دهید  $(\mathbb{R}, +)$  زیرگروه از اندیس متناهی غیر از خودش ندارد.
- ۲ الف) چند گروه آبلی دوه‌دو غیرایزومورف از مرتبه ۲۴ وجود دارد؟ همه آنها را پیدا کنید.  
ب) تعداد زیرگروه‌های دوری از مرتبه ۶ را در  $S_6$  پیدا کنید.
- ۳ الف)  $G$  یک گروه است. اگر  $\frac{G}{Z(G)}$  یک گروه دوری باشد آنگاه  $G$  آبلی است.  
ب)  $G$  یک گروه ناآبلی است. نشان دهید  $Aut(G)$  دوری نیست.
- ۴ الف) نشان دهید هر حوزه صحیح متناهی یک میدان است.  
ب) نشان دهید هر حوزه اقلیدسی یک حوزه ایده‌آل اصلی است.
- ۵ الف)  $R$  یک حلقه جابجایی از مشخصه  $p$  است. نشان دهید اگر  $p$  یک عدد اول باشد آنگاه  $f: R \rightarrow R$  تعریف شده به وسیله  $f(x) = x^p$  یک همومورفیسم حلقه‌ای است.  
ب) با ذکر یک مثال نشان دهید اگر  $p$  اول نباشد حکم قسمت قبل لزوماً برقرار نیست.
- ۶ الف) نشان دهید که چند جمله‌ای‌های زیر تحویل‌ناپذیرند.  
روی  $\mathbb{Q}$   $x^5 + 9x^4 + 12x^2 + 6$   
روی  $\mathbb{Z}_5$   $x^2 + 2$   
روی  $\mathbb{Q}$   $x^4 + 1$   
روی  $\mathbb{Q}$   $x^3 + 7x^2 + 5x + 1$   
ب) یک میدان ۲۵ عضوی بسازید.
- ۷ الف) مفاهیم عناصر اول و تحویل‌ناپذیر را در یک حوزه صحیح تعریف کنید.  
ب) فرض کنید  $D$  یک حوزه صحیح باشد. آنگاه هر عضو اول در  $D$  تحویل‌ناپذیر است.  
ه)  $p \in \mathbb{Z}$  یک عدد اول به صورت  $4k + 3$  است. فرض کنید برای  $a \in \mathbb{Z}$  و  $b \in \mathbb{Z}$  داشته باشیم  $p | (a^2 + b^2)$ . نشان دهید  $p | a$  و  $p | b$ . (راهنمایی: از اینکه  $p$  یک عدد اول گاوسی است استفاده کنید).

موفق باشید