

## دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ یکشنبه ۲۵ دی ۱۳۸۴

امتحان پایان ترم

آشنایی با جبر خطی

مدت: ۲¼ ساعت

۱) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -7 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix}$  داده شده است. فرض کنید  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  و  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$  (۹ نمره)

الف) برای چه مقادیری از  $y_1, y_2, y_3, y_4$  دستگاه  $AX = Y$  دارای جواب است؟  
 ب) پایه‌ای برای جواب‌های دستگاه  $AX = 0$  تعیین کنید. (۶ نمره)

۲ الف) ماتریس  $A$  که  $m \times n$  است داده شده است. می‌دانیم  $A^t A$  وارون پذیر است. نشان دهید که  $n \leq m$ . آیا بردارهای ستونی  $A$  مستقل خطی هستند؟ (چرا؟) (۱۰ نمره)  
 ب) ماتریس  $A$  و بردار  $b$  به صورت زیر داده شده است. بهترین جواب معادله  $AX = b$  را با استفاده از روش کمترین مربعات پیدا کنید. (۸ نمره)

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

۳ الف)  $A$  یک ماتریس متقارن از اندازه  $n$  با درایه‌های حقیقی است. نشان دهید  $A^2 + I \neq 0$ . (۶ نمره)  
 ب) با ذکر یک مثال نشان دهید اگر  $A$  متقارن نباشد حکم قسمت (الف) لزوماً درست نیست. (۵ نمره)  
 ج) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  داده شده است. با دادن توضیح تعیین کنید که آیا  $A$  قطری شدنی است یا نه. (۹ نمره)

۴) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  داده شده است.

الف) تمام مقادیر ویژه  $A$  را محاسبه کنید. (۵ نمره)  
 ب) سه بردار ویژه مستقل خطی برای  $A$  پیدا کنید. (۶ نمره)  
 ج) سه بردار ویژه دوه‌دو متعامد برای  $A$  پیدا کنید. (۶ نمره)  
 د) ماتریس متعامد  $P$  و ماتریس قطری  $D$  را چنان بیابید که  $P^t A P = D$ . (۳ نمره)

۵ الف) نشان دهید هر ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی را می‌توان به صورت مجموع دو ماتریس وارون پذیر نوشت.  
(۶ نمره)

ب) ماتریس مربعی  $A$  در معادله زیر صدق می‌کند:

$$A^4 - 3A^2 + A + I = 0.$$

نشان دهید  $A$  وارون‌پذیر است و وارون آن را برحسب  $A$  به دست آورید.  
(۶ نمره)

۶ اعداد  $a_1, a_2, \dots, a_n$  که همگی ناصفرند را در نظر می‌گیریم.

الف) رتبه و پوچی ماتریس  $A$  که به صورت زیر داده شده است را پیدا کنید.  
(۶ نمره)

ب) یک پایه برای فضای پوچ  $A$  ارائه کنید.  
(۶ نمره)

ج) برای  $n \geq 2$ ، دترمینان  $A$  را محاسبه کنید.  
(۳ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

جمع نمرات: ۱۰۰

موفق باشید