دانشگاه صنعتی شریف

میانترم جبر ۲ تاریخ پنجشنبه ۳ آذر ۱۳۸۴

---

۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. ثابت کنید اشتراک همه ایده‌آل‌های اول R برابر است با مجموعه عناصر پوچتوان R .

۲ الف) صورت محک آیزنشتاین را بطور دقیق بنویسید و آن را ثابت کنید.

ب) با استفاده از محک آیزنشتاین یا از راه دیگر نشان دهید چندجمله‌ای $f(X) = X^4 + 2X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ تحویل‌ناپذیر است.

۳ R یک حلقه جابجایی و یکدار است و M_1 و M_2 دو ایده‌آل ماکسیمال و متمایز در R هستند. ثابت کنید

$$M_1 \cap M_2 = M_1 M_2.$$

۴ الف) بدون دادن اثبات، لیست کامل همه اعداد اول را در حلقه اعداد صحیح گاوسی $\mathbb{Z}[i]$ بنویسید.

ب) عدد صحیح گاوسی $11 + 7i$ را به حاصلضرب اعداد اول تجزیه کنید.

۵ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $P(X)$ مجموعه توانی X باشد. حلقه بول $(P(X), \Delta, \cap)$ را در نظر می‌گیریم (Δ عمل تفاضل متقارن است).

الف) همه عناصر وارونپذیر، پوچتوان، خودتوان و مقسوم‌علیه‌های صفر را در $P(X)$ مشخص کنید.

ب) نشان دهید هر ایده‌آل $P(X)$ بصورت $P(Y)$ است برای یک زیرمجموعه مناسب $Y \subset X$.

ج) ایده‌آل سره I از $P(X)$ اول است اگر و تنها اگر بصورت $P(X \backslash \{x\})$ باشد برای یک $x \in X$ مناسب.

۶ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و چندجمله‌ای $f(x)$ در $R[x]$ مقسوم‌علیه صفر باشد. ثابت کنید عضو ناصفر $b \in R$ وجود دارد بطوری‌که $bf(x) = 0$.

موفق باشید